Důkaz matematickou indukcí

PhDr. Mgr. Jeroným Klimeš, Ph.D. 2025-12-25

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3=(1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2=2025$$

$$\sum_{n=1}^{m} n^3=\left(\sum_{n=1}^{m} n\right)^2$$

Dožiju se toho, když bude toto platit i pro následující člen - 10?
Platí vůbec tento vzorec obecně?
Dokažte nebo vyvraťte dokonce roku 2025...

Odpovědi

Ano, platí to obecně a dokážeme si to matematickou indukcí.
Nesmrtelný Žid se dožije i desítky, já zřejmě ne, najisto si to povíme L. P. 3025.
A nyní důkaz.
Dokažte matematickou indukcí, že platí:

$$\sum_{n=1}^{m} n^3=\left(\sum_{n=1}^{m} n\right)^2 \qquad \text{(a)}$$

Matematická indukce se dokazuje ve dvou krocích. Pro m=1 a pro m+1
Pro m=1 zjevně platí, teď musíme dokázat implikaci:

Platí-li to pro m, pak to platí i pro m+1,

(a) $\Rightarrow$ ***(b)***

tedy předpokládáme, že uvedený vzorec platí a vložíme do něho m+1

$$\sum_{n=1}^{m+1} n^3=\left(\sum_{n=1}^{m+1} n\right)^2 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum_{n=1}^{m} n^3+(m+1)^3=((1+2+...+m)+(m+1))^2$$

Pravou stranu řešíme jako vzorec: $(a+b)^{2.}$

$$\sum_{n=1}^{m} n^3+(m+1)^3=(1+2+...+m)^2+2\left(\sum_{n=1}^{m} n\right)(m+1)+(m+1)^2$$

$$\sum_{n=1}^{m} n^3+(m+1)^3=\left(\sum_{n=1}^{m} n\right)^2+2\left(\sum_{n=1}^{m} n\right)(m+1)+(m+1)^2$$

Nyní odečteme vzorec (a), o kterém předpokládáme, že platí, viz implikace. Zmizí to modré.

$$(m+1)^3=2\left(\sum_{n=1}^{m} n\right)(m+1)+(m+1)^2$$

Vytkneme (m+1) a vykrátíme.

$$(m+1)^2=2\left(\sum_{n=1}^{m} n\right)+(m+1)$$

Modrá suma napravo je trojúhelníkové číslo.

Trojúhelníková čísla známe z Bible a mají jednoduchý vzorec: $\frac{m(m+1)}{2}$

$$(m+1)^2=2\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)+(m+1)$$

$$(m+1)^2=(m^2+m)+(m+1)$$

$$(m+1)^2=m^2+2m+1$$

$$(m+1)^2=(m+1)^2$$

Vzorec platí i pro m+1 a tím je důkaz matematickou indukcí dokončen.
Tento dokázaný krok začne od jedné, udělá dvojku, pak trojku,
a tak jaksi sám bez odmlouvání proběhne všechna přirozená čísla,
takže tato posloupnost platí od 1 až do nekonečna.
Prý, tedy když tomu věříte. Říkali to kdysi na Gymnasiu Vimperk... :-)